

ЛЕКЦИЯ 1+(2). Кинематика

А.И. Валишев, В.Г. Сербо,

Принятые обозначения.

1. **Df** – definition (англ.) – определение.
2. **Rep** – repeat (англ.) – повторение.
3. $\vec{a}, \vec{A}$, или a, A – вектор.
4. $\parallel$ – параллельное $\equiv$ тангенциальное (направление).
5. $\perp$ – перпендикулярное $\equiv$ нормальное (направление).
6. $\sim$ – в численных оценках «по порядку величины».
7. $\propto$ – пропорционально, «меняется как...».
8. $(ab) = (a \cdot b) = (\vec{a} \vec{b})$ – скалярное произведение векторов.
9. $[a, b] = a \times b = [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}$ – векторное произведение векторов.
10.  – вектор направлен от наблюдателя (видно оперение стрелы).
11.  – вектор направлен к наблюдателю (виден наконечник стрелы).

Масштабы времен, расстояний, масс.

	Время		Ед. измерения
1	От Большого Взрыва (Big bang)	13,7	млрд. лет (10^9 л.)
2	Возраст Земли	4÷5	млрд. лет (10^9 л.)
3	Земной год	$\approx \pi \cdot 10^7$	с
4	Пульсовый интервал	~ 1	с
5	Характерное атомное время	10^{-17}	с
6	Характерное ядерное время	10^{-23}	с
	Расстояние		Ед. измерения
1	Видимая часть Вселенной	10^{26}	м
2	Расстояние до ближайшей звезды	$4 \cdot 10^{16}$	м
3	Радиус орбиты Земли	150	млн. км. = 1 а.е.
4	Радиус Солнца	0,7	млн. км.
5	Радиус Земли	6 400	км
6	Длина волны видимого света	$\sim 10^{-7}$	м
7	Размер атома	$\sim 10^{-10}$	м
8	Размер протона	$\sim 10^{-15}$	м
	Масса		Ед. измерения
1	Масса Земли	$6 \cdot 10^{24}$	кг
2	Луны	$7,3 \cdot 10^{22}$	кг
3	молекулы ДНК	$\sim 10^{-22}$	кг
4	атома водорода	$1,7 \cdot 10^{-27}$	кг
5	электрона	$0,9 \cdot 10^{-30}$	кг

1. Координаты и скорость материальной точки.

1.1 Координаты

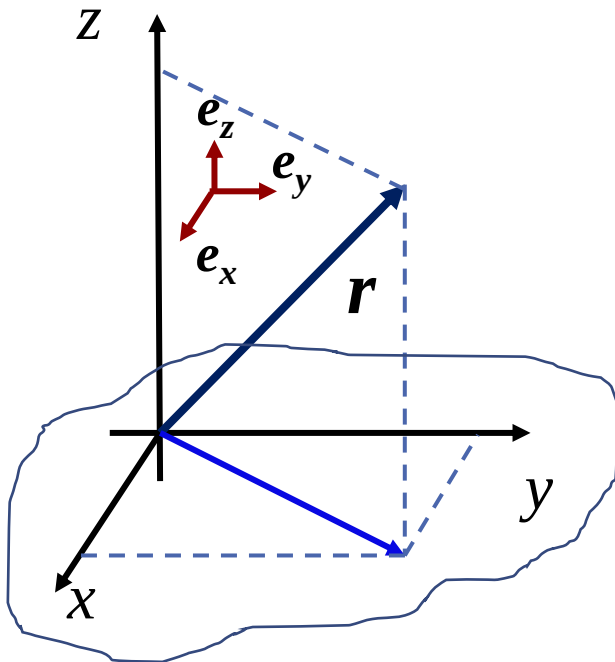
Df. Материальная точка.

a) **Декартова система координат.**

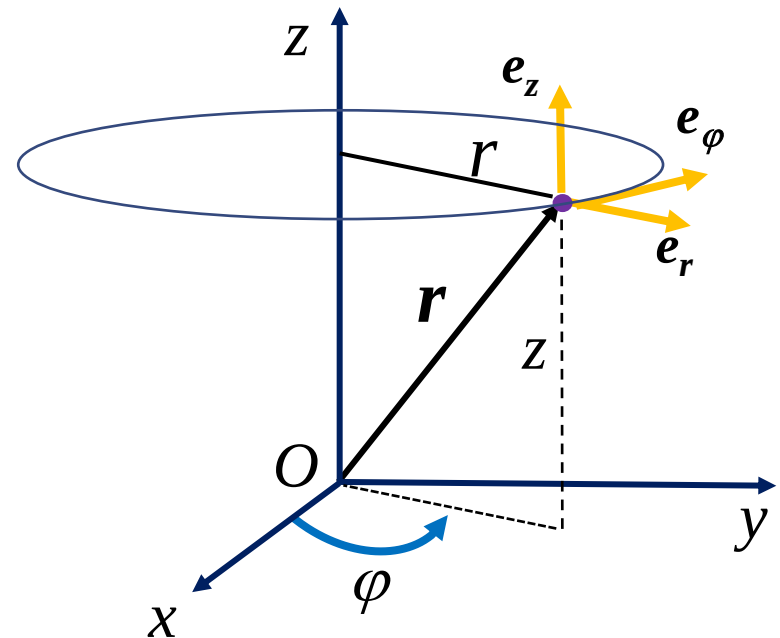
Орты декартовой системы.

b) **Цилиндрическая → Полярная система.**

Орты полярной системы.



a.



b.

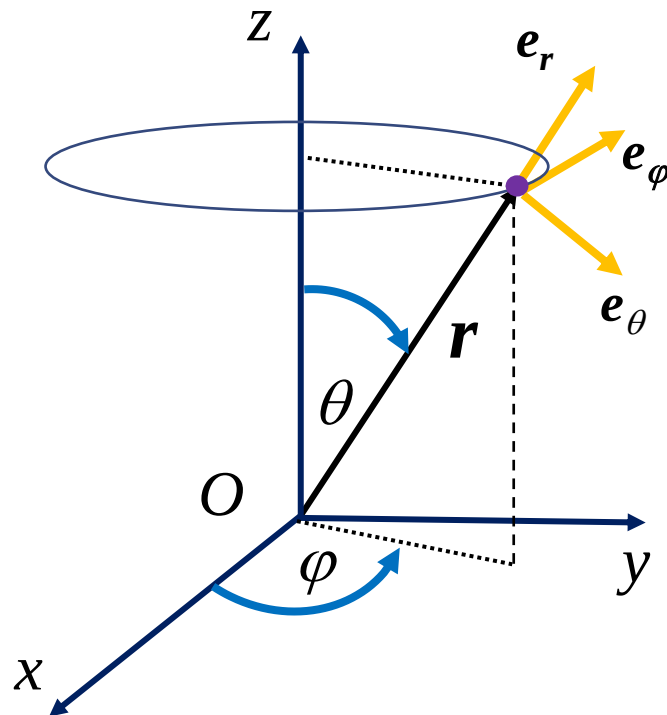
$$dr = e_r dr + e_\phi r d\phi + e_z dz$$

1. Координаты и скорость материальной точки.

1.1 Координаты

с) Сферическая система координат.

Орты сферической системы координат



$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\theta r d\theta + \mathbf{e}_\varphi r \sin\theta d\varphi$$

с.

1.2 Скорость.

Df. Скорость равна производной радиус-вектора по времени.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

a) **Годограф скорости.**

b) **Компоненты скорости в декартовых координатах.**

Орты, соотношения ортогональности.

Символ Кронекера. $\vec{e}_i \vec{e}_j = \delta_{ij}$, $i = j \rightarrow \delta_{ii} = 1, i \neq j \rightarrow \delta_{ij} = 0$;

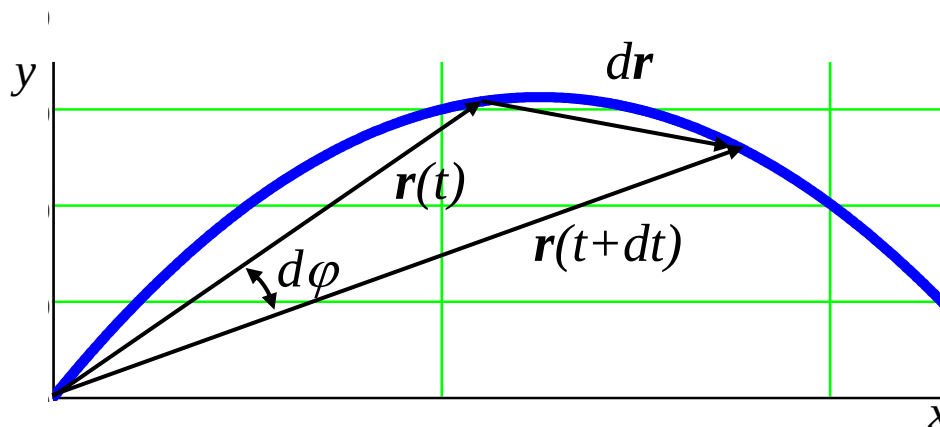
c) **Модуль скорости.**

d) **Компоненты скорости в полярных координатах.**

e) **Компоненты скорости в сферических координатах.**

f) **Рассмотрение примера.**

Движение тела, брошенного под углом к горизонту. $r(t) = (x(t), y(t))$;



1.3 Продольная и поперечная компоненты скорости.

Df. Геометрия приращения радиус – вектора $\Delta r_{\parallel}$, $\Delta r_{\perp}$

a) Движение по окружности постоянного радиуса R .

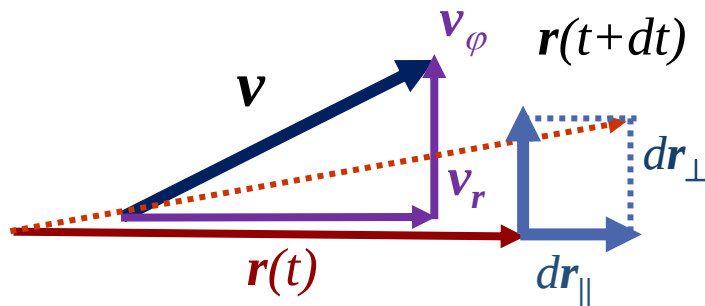
b) Ортогональность радиус-вектора и вектора скорости.

c) Дифференцирование орта e_r по времени. Связь орта e_r с ортом e_{φ} .

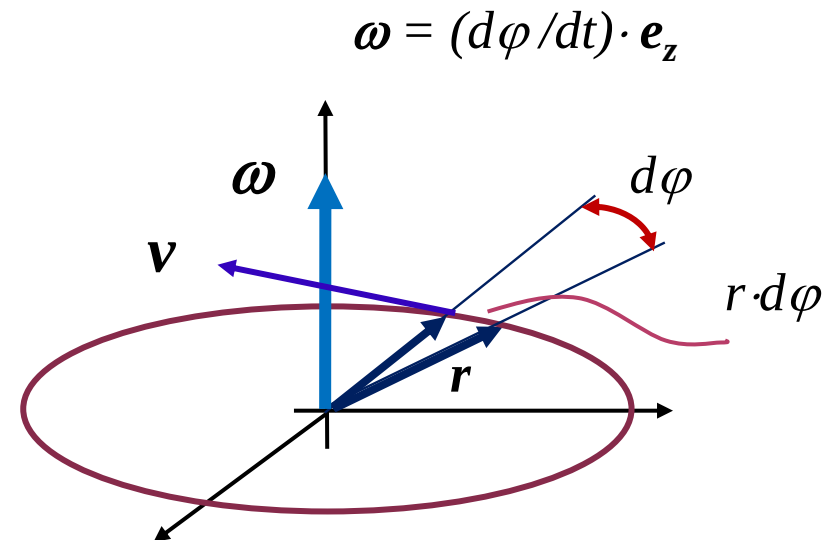
d) Разложение вектора скорости на продольную и поперечную компоненты.

e) Угловая скорость.

f) Рассмотрение примера.



$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_{\varphi} = \\ &= \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_n\end{aligned}$$



2. Ускорение. (Acceleration)

Df. Ускорение равно производной скорости по времени

a) **Ускорение – вторая производная радиус-вектора по времени.**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}.$$

b) **Восстановление скорости (v) по ускорению (a).**

c) **Восстановление радиус-вектора по скорости.**

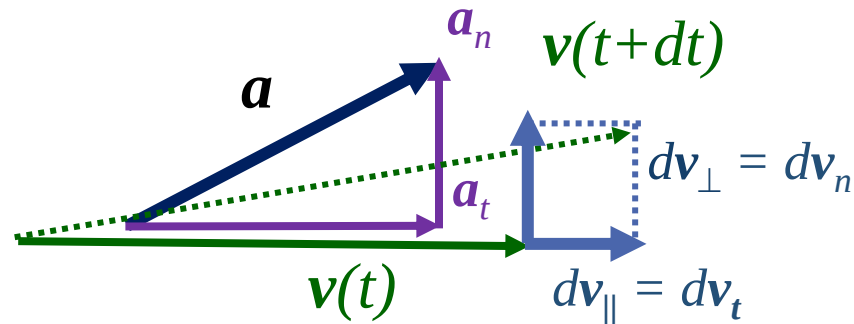
d) **Рассмотрение примера.**

2.1 Ускорение при движении по окружности.

a) **Продольное относительно скорости ускорение a_t .**

b) **Поперечное относительно скорости ускорение a_n .**

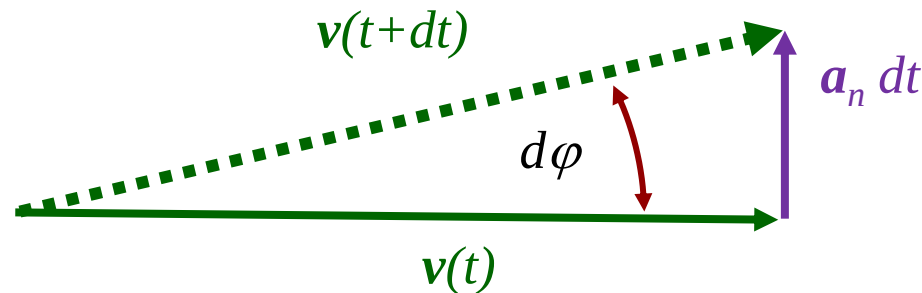
c) **Центростремительное ускорение**



$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_v + \mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n$$

2.2 Ускорение при движении по произвольной криволинейной траектории

- a) **Модуль продольного ускорения есть проекция полного ускорения на направление скорости.**
- b) **Изменение угла при малом повороте скорости $d\varphi = a_n dt / v$.**
- c) **Связь центростремительного ускорения с мгновенной скоростью.**
- d) **Кривизна траектории.**
- e) **Радиус кривизны траектории.**
- f) **Формулы вычисления радиуса кривизны.**
- g) **Рассмотрение примера.**

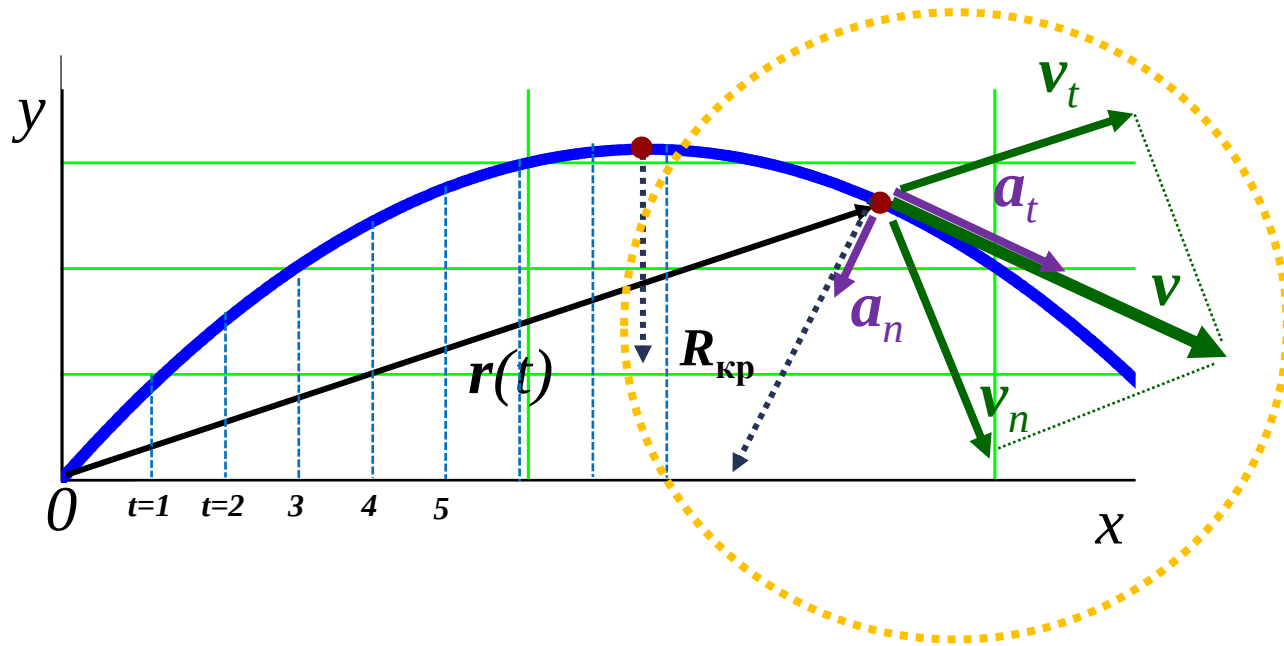


$$dv_{\perp} = dv_n = a_n dt = v \cdot d\varphi$$

2.2+ Разложение скорости и ускорения по компонентам.

Компоненты скорости $\mathbf{v}_t \parallel \mathbf{r}$, $\mathbf{v}_n \perp \mathbf{r}$;

Компоненты ускорения тангенциальная $\mathbf{a}_t \parallel \mathbf{v}$,
нормальная $\mathbf{a}_n \perp \mathbf{v}$.



Соотношение между компонентами ускорения $\mathbf{a}_t$, $\mathbf{a}_n$

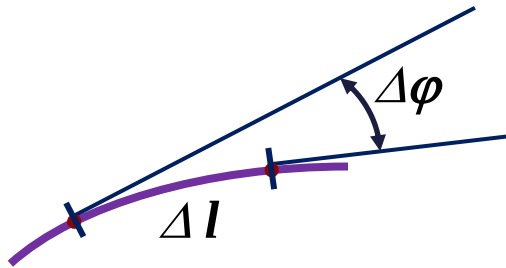
$$\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t = \vec{a} - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{v})}{v^2} \cdot \vec{v} ; \quad \vec{a}_n \perp \vec{a}_t , \quad (\vec{a}_n \cdot \vec{a}_t) = 0 .$$

2.2+ Кривизна траектории. Радиус кривизны.

? Насколько искривлена прямая линия.

? Постоянна ли кривизна у окружности.

Df. Кривизна $K = d\varphi / dl$; $R_{\text{кр}}$ – радиус кривизны.

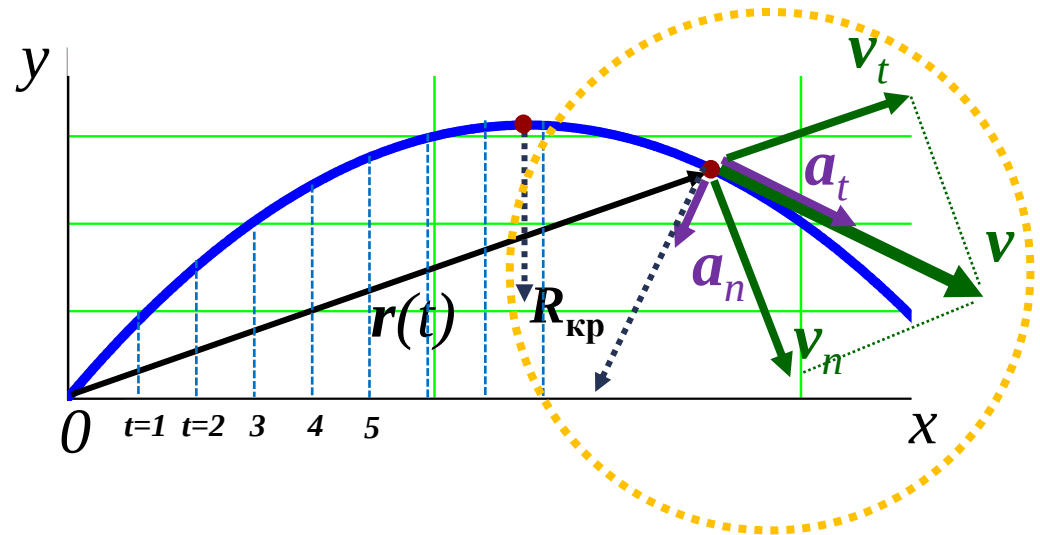


$$K = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta l}, \quad R_{\text{кр}} = \frac{1}{K}.$$

$$a_n = \frac{v^2}{R_{\text{кр}}}$$

Rem.

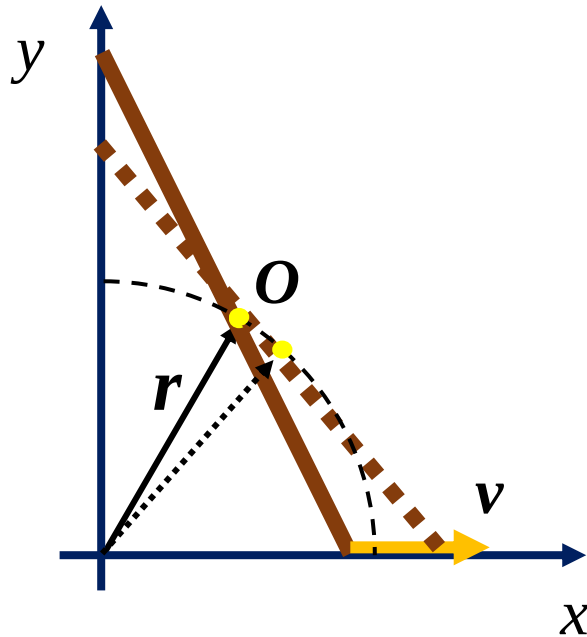
$$\begin{aligned} \vec{a}_n &= \vec{a} - \vec{a}_t = \\ &= \vec{a} - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{v})}{v^2} \cdot \vec{v}. \end{aligned}$$



Ех. Пример 1.

Определить траекторию т. O - середины стержня $r(t)$. Концы стержня скользят по координатным осям. Скольжение по оси x с постоянной скоростью v .

Первоначально ($t = 0$) стержень длины l расположен вертикально.



Ех. Пример 1.

Запишем координаты т. О.

$$\vec{r}(t) = (x_O(t), y_O(t)) ;$$
$$x_O(t) = \frac{1}{2}vt, \quad y_O(t) = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - (vt)^2},$$

Составим комбинацию: $x_O^2 + y_O^2 - ?$

$$x_O^2 + y_O^2 = \frac{1}{4}(vt)^2 + \frac{1}{4}(l^2 - (vt)^2) = \frac{1}{4}l^2 ;$$

Получено уравнение окружности.

Дифференцируя x_O, y_O по времени нетрудно получить скорости т.О как функции времени:

$$u = \frac{dx_O}{dt} = \frac{1}{2}v, \quad w = \frac{dy_O}{dt} = \frac{1}{4} \frac{-2v^2 t}{\sqrt{l^2 - (vt)^2}} = -\frac{1}{2}v \frac{x_O}{y_O} ;$$
$$u = \frac{1}{2}v, w = 0! , \quad u(l/v) = \frac{1}{2}v, w(l/v) \rightarrow \infty ;$$

Вопрос. Найти угловую скорость стержня как функцию времени?

Ех. Пример 2.

Определение кривизны кривой.

Задана плоская кривая $y = y(x)$.

Малое приращение длины dl :

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{dx^2 + (y')^2 dx^2} = \\ &= dx \sqrt{1 + (y')^2}, \\ y' &= \operatorname{tg} \alpha; \end{aligned}$$

$$d(\operatorname{tg} \alpha) = d(y') = y'' dx = \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha};$$

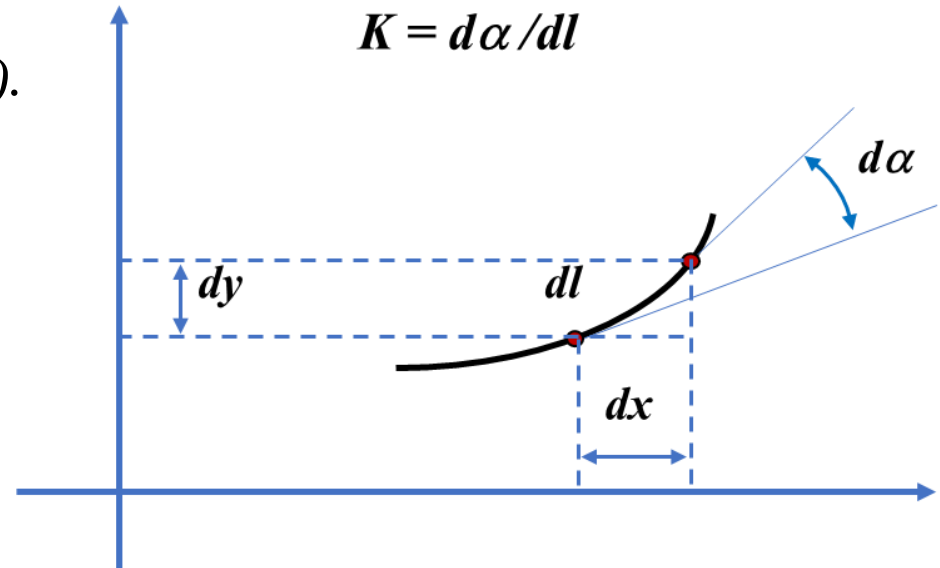
$$\rightarrow d\alpha = \cos^2 \alpha \cdot d(y');$$

$$d\alpha = \frac{d(y')}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{d(y')}{1 + (y')^2};$$

Записываем кривизну:

$$K = \frac{d\alpha}{dl} = \left[\frac{d(y')}{1 + (y')^2} \right] / \left[dx \sqrt{1 + (y')^2} \right] = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}.$$

Существует другой, кинематический способ вычисления кривизны.



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

<http://phys.nsu.ru/fit>

<http://el.nsu.ru>